Chapitre 5 – Expressions littérales

1) Qu'est-ce qu'une expression littérale ?

Une expression littérale est une expression mathématique qui contient des nombres et une ou plusieurs lettres. Ces lettres représentent des nombres. Une expression littérale peut être utilisée pour généraliser, pour décrire un programme de calcul ou pour démontrer.

Exemples :

- Dans l'activité, si n désigne le nombre de lignes du carré, alors 3 × n – 2 est une expression littérale qui permet de donner le nombre de carreaux coloriés.
- Pour calculer le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l, on peut utiliser l'expression littérale 2 × L + 2 × l ou 2 × (L + l).
- On considère un programme de calcul qui double un nombre choisi puis ajoute 3 au résultat. Si on appelle n le nombre choisi au départ, l'expression littérale qui correspond à ce programme de calcul est 2 × n.

Remarques :

1) Il est possible de ne pas écrire le symbole × devant une lettre ou une parenthèse. Par exemple, 2 × a + 3 peut s'écrire 2a + 3 et 3 × (y + 1) peut s'écrire 3(y + 1).
2) L'expression littérale $y \times y$ s'écrit plus simplement y^2 et se lit « y au carré ».
3) L'expression littérale $y \times y \times y$ s'écrit plus simplement y^3 et se lit « y au cube ».

2) Expressions littérales égales

a) Calculer la valeur d'une expression littérale

Calculer la valeur d'une expression littérale signifie remplacer chaque lettre par un nombre donné et effectuer le calcul.

Exemples :

1) On calcule la valeur de $7x + 3$ pour $x = 1$:

$7x + 3 = 7 \times 1 + 3$

$= 7 + 3 = 10$

2) On calcule la valeur de $3y + 2t$ pour $y = 5$ et $t = 6$:

$3y + 2t = 3 \times 5 + 2 \times 6$

$= 15 + 12 = 27$

b) Test d'égalité

Une égalité où interviennent des expressions littérales peut être vraie pour certaines valeurs attribuées aux lettres et fausse pour d'autres. Deux expressions littérales sont égales si elles sont toujours égales, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres. Pour prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales, il suffit de trouver une valeur pour lesquelles elles sont différentes (voir exemple). Pour montrer que deux expressions sont (toujours) égales, on « transformera » les expressions littérales.

Exemple : Les expressions 4 + 2x et 5x + 4 sont-elles égales ?

- Pour x = 0 :
  - $4 + 2x = 4 + 2 \times 0 = 4$
  - $5x + 4 = 5 \times 0 + 4 = 4$

Donc l'égalité est vraie pour x = 0.

- Pour x = 1 :
  - $4 + 2x = 4 + 2 \times 1 = 6$
  - $5x + 4 = 5 \times 1 + 4 = 9$

Donc l'égalité est fausse pour x = 1.

Les expressions 4 + 2x et 5x + 4 ne sont donc pas égales.

3) Transformer une expression littérale

Dans la partie 1), nous avons évoqué quelques simplifications pour les expressions littérales : suppression du « fois » sous certaines conditions et utilisation des exposants ^{2} et ^{3}. En voici d'autres qui découlent de propriétés déjà connues.

- Si a est un nombre alors $0 \times a$ s'écrit 0 plutôt que 0a.
- Si a est un nombre alors $1 \times a$ s'écrit a plutôt que 1a.
- La commutativité de l'addition et de la soustraction permet d'effectuer des transformations.
  - $4 + 9k + 3 = 9k + 4 + 3 = 9k + 7$
  - $2 \times y \times 3 = 2 \times 3 \times y = 6y$.

D'autres simplifications sont possibles et font un « sens calculatoire ».

Propriété : Si a, b et x désignent trois nombres, alors :

$$ax + bx = (a + b)x$$

et

$$ax - bx = (a - b)x$$

Exemples :

$$A = 3x + 7x = (3 + 7)x = 10x$$

$$B = 9t - 2t = (9 - 2)t = 7t$$

4) Démontrer

Démontrer c'est « prouver quelque chose, l'établir par un raisonnement de type déductif » (dictionnaire Larousse).

Exemple n°1 :

On souhaite démontrer la propriété suivante :

« La somme de deux nombres entiers consécutifs est un nombre impair. »

Soit n un nombre entier quelconque.

- Le nombre entier qui suit s'obtient en lui ajoutant 1, il s'écrit donc $n + 1$.
- La somme de deux nombres entiers consécutifs s'écrit donc $n + (n + 1)$ soit $2n + 1$ après simplification.
- Or, $2n$ est pair (car c'est un multiple de 2) donc $2n + 1$ est impair.

Ainsi, quel que soit le nombre entier n, la somme de n et de $n + 1$ est impaire donc la propriété est vraie.

Exemple n°2 : On considère le programme de calcul ci-dessous.

1.	Choisir un nombre.
2.	Le multiplier par 3.
3.	Ajouter 5 au résultat.
4.	Soustraire le triple du nombre de départ.

Conjecture : quel que soit le nombre choisi au départ, on obtient 5 à la fin du programme.

Démonstration : On « traduit » le programme de calcul à l'aide d'une expression littérale.

1. On appelle n le nombre choisi au départ.
2. On obtient $3 \times n$ soit $3n$.
3. On obtient $3n + 5$.
4. On obtient $3n + 5 – 3n = 5$ après simplification.

La conjecture est vérifiée.